

13.05.2014 23 Ergodensatz: Existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $Q^n$  eine positive Spalte besitzt, so ist  $Q$  ergodisch, d.h.

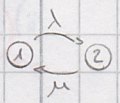
asymptotisch und einfach. Existiert ein  $t > 0$ , so dass die Übergangsmatrix  $P(t)$  lauter positive Einträge besitzt, so existiert  $P(\infty)$  mit lauter gleichen positiven Zeilen  $\vec{p}$ , und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_0 \end{pmatrix} P(t) = \vec{p} \text{ für alle Startverteilungen } p_0. \quad P(\infty) = \vec{E} = Q^{-1}$$

Bsp.: a)  $Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$  ergodisch.  
 ↳ 1. Spalte erfüllt nicht pos. Spalte, da 0 dabei

von Conway: Die Einfachheit ist asymptotisch gleichbedeutend mit Unabhängigkeit von der Startverteilung

$\Rightarrow Q^\infty$  hat lauter gleiche positive Zeilen  $\vec{p}$ , und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{p}_0 Q^n) = \vec{p}_0 Q^\infty = \vec{p}$  für jede Startverteilung  $\vec{p}_0 = (p, 1-p) : p \in [0, 1]$   $[\vec{p} Q = \vec{p} \Rightarrow \vec{p} = (\frac{5}{13}, \frac{10}{13})]$

(siehe Dop. frühl) e) Der M-Prozess mit Identitätsmatrix  $B = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$  hat die Übergangsmatrix 

$$P(t) = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu \lambda & \lambda \\ \mu \lambda & \lambda \end{pmatrix} e^{-(\lambda + \mu)t} B, \lambda, \mu > 0$$

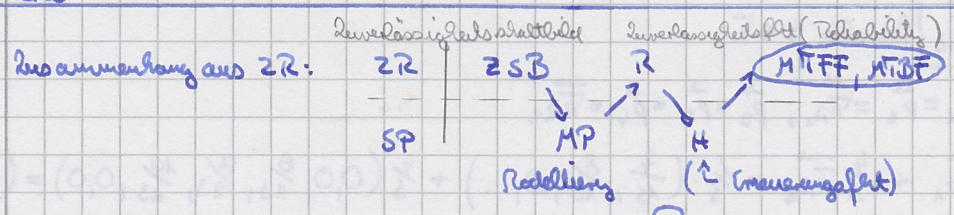
zum 1. Eintrag:  $\mu + e^{-(\lambda + \mu)t} \lambda$  ist z.B. für  $t = 0$  ungleich Null.  $\mu + e^0 \lambda = \mu + \lambda > 0$ . Analog

Überlegungen für den letzten Eintrag  $\Rightarrow P(t)$  hat lauter positive Einträge

Betrachtung der „Neben-diagonalen“:  $\mu - e^{-(\lambda + \mu)t} \mu > 0$  für alle  $t > 0 \Rightarrow P(t)$  hat lauter positive Einträge für  $t > 0$   $\xrightarrow[\text{-notiz}]{\text{ergodisch}}$  Der M-Prozess ist Ergodisch.

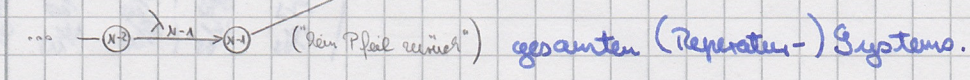
Berechnung der eindeutigen Grenzverteilung  $\vec{p}$ :  $\vec{p} \cdot B = 0 \iff \vec{p} = (p, 1-p) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 $\iff -\lambda p + \mu(1-p) = 0 \iff \mu = (\lambda + \mu)p \iff p = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{pmatrix}$

5 Erneuerungstheorie



Situation: bel. Zählprozess, dessen Pausenzeiten einen Erneuerungprozess bilden, d.h. die  $D_n$  sind unabhängig und identisch verteilt. [Spezialfall: Poisson-Prozess]

Ereignisse werden hier „Erneuerungen“ genannt. Beschränkung auf einen Geburts- und Todesprozess mit „abschließendem Systemausfall“, das immer wieder „neu“ aufgestellt wird, d.h. Erneuerung des



Technische Voraussetzungen: Dichtfkt.  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  da  $D_n$  stückweise stetig und  $f(t) \leq c e^{-\alpha t} \beta$  für geeignete Konstanten  $c, \alpha, \beta > 0$