15.05.2014 23 **Ergodensatz**: Existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass Q^n eine positive Spalte besitzt, so ist Q ergodisch, d.h. asymptotisch und einfach. Existiert ein $t>0$, sodass die Übergangsmatrix $P(t)$ lauter positive Einträge besitzt, so existiert $P(\infty)$ mit lauter gleichen positiven Zeilen $\vec{p}$, und es gilt

Startverteilung, Grenzverteilung

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \left(\vec{p}_0\, P(t)\right) = \vec{p}}$$ für alle Startverteilungen p_0.

Einheitsmatrix

$P(0) = E = Q^0$

Bsp.: a) $Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ ergodisch. – positiv

↳ 1. Spalte erfüllt nicht pos. Spalte, da 0 dabei

zur Erinnerung: Die Einfachheit ist asymptotisch gleichbedeutend mit Unabhängigkeit von der Startverteilung

$\Rightarrow Q^\infty$ hat lauter gleiche positive Zeilen $\vec{p}$, und es gilt $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\vec{p}_0\, Q^n\right) = \vec{p}_0\, Q^\infty = \vec{p}}$ für jede Startverteilung $\vec{p}_0 = (p, 1-p)$; $p \in [0,1]$ $\left[\vec{p}\,Q = \vec{p} \Rightarrow \vec{p} = \left(\frac{9}{19}, \frac{10}{19}\right)\right]$

(siehe Bsp. früher) b) Der M-Prozess mit Intensitätsmatrix $B = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$ hat die Übergangsmatrix $1 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 2$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} - e^{-(\lambda+\mu)t} B\right),\ \lambda, \mu > 0$$

zum 1. Eintrag: $\mu + e^{-(\lambda+\mu)t}\lambda$ ist z.B. für $t=0$ ungleich Null. $\mu + e^0\lambda = \mu+\lambda > 0$. Analoge Überlegungen für den letzten Eintrag $\Rightarrow P(0)$ hat lauter positive Einträge

Betrachtung der „Nebendiagonalen": $\mu - e^{-(\lambda+\mu)t}\mu > 0$ für alle $t>0$ $\Rightarrow P(t)$ hat lauter positive Einträge für $t>0$ $\xRightarrow[\text{-satz}]{\text{ergoden}}$ Der M-Prozess ist Ergodisch.

Berechnung der eindeutigen Grenzverteilung $\vec{p}$: $\boxed{\vec{p}\cdot B \overset{!}{=} 0} \overset{\vec{p}=(p,1-p)}{\Longleftrightarrow} (p, 1-p)\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow -\lambda p + \mu(1-p) = 0 \Longleftrightarrow \mu = (\lambda+\mu)p \Longleftrightarrow p = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)}$ Grenzverteilung

33

③ Erneuerungstheorie

Zusammenhang aus ZR:

Zuverlässigkeitsschaltbild | Zuverlässigkeitsfkt (Reliability)

ZR | ZSB → MP → R → H → MTTF, MTBF

SP | MP, H

Modellierung (↳ Erneuerungsfkt)

Situation: bel. Zählprozess, dessen Pausenzeiten D_n einen Erneuerungsprozess bilden, d.h. die D_n sind unabhängig und identisch verteilt. [Spezialfall: Poisson-Prozess]

Ereignisse werden hier „Erneuerungen" genannt. Beschränkung auf einen Geburts- und Todesprozess mit „absorbierendem" Systemausfall, der immer wieder „neu" aufgesetzt wird, d.h. Erneuerung des gesamten (Reparatur-) Systems.

wenn man da gelandet ist, kommt man nicht mehr raus

$\cdots \to (N-2) \xrightarrow{\lambda_{N-1}} (N-1)$ („kein Pfeil zurück")

Technische Voraussetzungen: Dichtefkt. $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ der D_n stückweise stetig und

$f(t) \leq c\, e^{-\alpha t^\beta}$ für geeignete Konstanten $c, \alpha, \beta > 0$